Alcune riflessioni sulla geometria frattale

di Giuseppe Gentile

Introduzione

In un momento storico in cui, soprattutto in Italia, è sempre più evidente quella "crisi di vocazioni" che affligge il comparto scientifico, ed in maniera particolare la Matematica, i frattali costituiscono uno di quei pochissimi rami della Matematica stessa più "diffusi" fra il grande pubblico. Da una parte questa diffusione non sorprende più di tanto, non fosse altro che per l'affascinante modo con cui essi vengono presentati: le immagini rappresentative di alcuni frattali infatti si trovano ormai sulle pagine di periodici più o meno specialistici e alcune di esse, come la rappresentazione del frattale di Mandelbrot, sono da tempo esposte in mostre fotografiche o gallerie d'arte. Dall'altra c'è però (e neanche questo può costituire una sorpresa) una mancanza di conoscenza di quello che siano i frattali, al di là della loro rappresentazione visiva. Il presente contributo certo non si propone di colmare questa lacuna, ma si prefigge l'obiettivo di tracciare un percorso storico-matematico che chiarire la genesi di alcuni concetti tipici della geometria frattale: in particolare verrà discussa la dimensione non intera, che a prima vista può apparire paradossale (cioè nel senso etimologico della parola, contraria all'opinione), cercando di metterne in luce la problematicità, la novità, la particolarità ed il legame con un altro concetto centrale nel campo dei frattali, quello di autosimilarità.

Dalla dimensione di Hausdorff alla costa della Bretagna

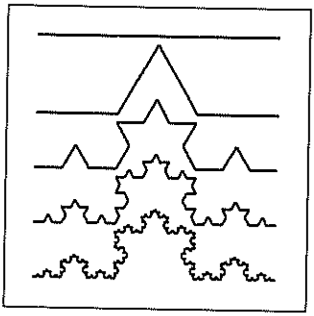
Come si calcola la lunghezza di una linea o l'area di una superficie o, ancora, il volume di un solido? Cercheremo di dare un'idea della procedura illustrandola solo per il primo dei tre casi proposti, cioè il problema di determinare la lunghezza di una linea, seguendo un processo che va dal semplice al complesso. Cominciamo dunque col considerare, per semplicità, una linea retta di estremi A e B. Se si vuole sapere quanto è lunga tale linea, bisogna scegliere un segmento-campione U (che fungerà da unità di misura) e contare quante volte il segmento U va giustapposto a se stesso fino ad esaurire esattamente l'intera linea retta AB; possiamo anche cambiare il segmento-campione, ad esempio scegliendone uno più piccolo: in tal caso sarà necessario contare un numero maggiore di volte per esaurire tutta la linea retta AB. Ad esempio, quando diciamo che un palazzo è alto 15 metri, stiamo semplicemente dicendo che, se come segmento-campione U usassimo il metro-campione, bisognerebbe sovrapporlo a se stesso 15 volte per esaurire tutta la lunghezza del palazzo. Se poi usassimo il decimetro-campione, bisognerebbe sovrapporlo a se stesso 150 volte, il che vuol dire che lo stesso palazzo è alto 150 decimetri; il fatto poi che le due diverse procedure sono servite a misurare la stessa cosa, ci dice che le due misure sono equivalenti, cioè la ben nota equivalenza 15 m = 150 dm.

Può capitare poi che, per talune linee rette, il segmento-campione U non venga contato un numero intero di volte; in tal caso, la scelta di un segmento-campione U più piccolo è necessaria se si vuole esprimere la lunghezza di tale linea. Ad esempio, supponiamo di voler misurare la lunghezza di una strada con un segmento-campione U e che, dopo aver giustapposto U per 7 volte, rimanga ancora un tratto di strada che, però, è minore di U: in tale situazione potremmo affermare che la strada è lunga più di 7U e meno di 8U. Di fronte a questa situazione, si può tentare di ridurre il segmento-campione scegliendone uno che sia, ad esempio, la metà del precedente; anche stavolta può ripresentarsi il problema di prima, cioè può capitare di giustapporre tale nuovo segmento-campione U_1 un numero non intero di volte: supponendo di aver usato il segmento campione U_1 15 volte, rimane ancora un tratto di strada minore di U_1. Si può cambiare ancora il segmento-campione scegliendo stavolta un quarto di U: indicando tale segmento-campione con U_2, supponiamo di essere stati fortunati e di aver usato il nostro U_2 esattamente 31 volte; ora siamo in grado di dire quanto è lunga la strada, potendo esprimere tale lunghezza tramite l'unità di misura indicata da U_2: la nostra risposta sarà "la strada è lunga $31U_2$" oppure "la strada è lunga $7U + 2U_1 + 1U_2$".

Cerchiamo ora di avvicinare quanto detto alla nostra tradizione di misurazione e di rappresentazione numerica, cioè ripercorriamo l'esam pio fatto scegliendo come segmento-campione U il "metro"; alla prima misurazione affermeremmo che la strada è lunga più di 7 metri e meno di 8 metri; ora, all'interno di quella che ho chiamato tradizione di misurazione e di rappresentazione numerica, scegliamo come sottomultiplo U_1 la decima parte di U, cioè la decima parte di un metro, che viene chiamato decimetro; nella precedente situazione ci troveremo a dire che il segmento-campione U_1 è stato utilizzato 77 volte, ma che è rimasta una parte da misurare inferiore ad U_1 stesso; sceglieremo così un altro segmento-campione U_2 pari alla centesima parte di U (ovvero la decima parte di U_1), che viene chiamato decimetro; nella situazione descritta ci troveremo ad usare tale segmento-campione esattamente 775 volte, col che potremo dire che la lunghezza della strada è pari a 775 cm ovvero 77 dm + 5 cm o ancora 7 m + 7 dm + 5 cm. Questa tradizione di misurazione, in particolare la scelta di segmenti-campione che siano la decima parte del precedente, si adatta bene all'altra tradizione cui si faceva riferimento, quella di rappresentazione numerica posizionale decimale: infatti, con tali scelte, possiamo riscrivere le precedenti misure, rispettivamente, come 775 cm o 77,5 dm o 7,75 m, tutte fra di loro equivalenti.

Questo tipo di approccio alla misurazione, cioè la scelta di un conveniente segmento-campione, fallisce però già in casi alquanto semplici: come ben sapevano i Matematici dell'antica Grecia, per misurare la diagonale di un quadrato non può essere usato né il lato dello stesso quadrato né alcun suo sottomultiplo, ma rimarrà sempre una parte della diagonale non esprimibile né in termini di lato né di alcun suo sottomultiplo. Oggi esprimiamo questo fatto dicendo che le due grandezze (lato e diagonale) non sono commensurabili ovvero che il rapporto fra la diagonale ed il lato di un quadrato non è un numero razionale. Per riuscire ad esprimere tale lunghezza, usando come segmento-campione il lato del quadrato medesimo, siamo costretti ad introdurre un nuovo tipo di numero, il numero irrazionale, che consente proprio di indicare tale rapporto con il simbolo $\sqrt{2}$. Lasciando da parte tutte le ripercussioni di carattere matematico e filosofico legate alla scoperta di grandezze incommensurabili (ciò che esula dagli scopi del presente articolo), è invece da sottolineare come in tutti i casi finora discussi c'è una cosa implicitamente assunta e che si mantiene costante: esiste una quantità, la lunghezza della linea, che non dipende dal segmento-campione scelto. Ovviamente dalla scelta di tale segmento-campione (cioè dell'unità di misura) dipenderà l'espressione di tale lunghezza, ma l'esistenza di quella quantità non viene scalfita dalle diverse possibilità di esprimerla che a quel punto, come abbiamo visto, sono fra di loro equivalenti.

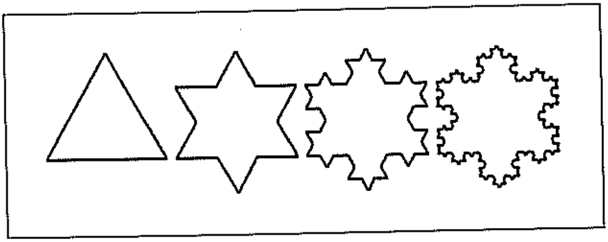
Questa implicita assunzione, che appare tanto lecita quanto naturale, ha cominciato a vacillare quando fra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo la comunità matematica ha iniziato a considerare curve un po' più "strane" di quelle studiate fino a quel momento: ci stiamo riferendo in particolare alla curva di Peano e alla curva di Koch. Cercheremo di definire ed analizzare solo quest'ultima poiché si presta meglio ad essere descritta ad un pubblico non specialistico ed è di maggiore utilità nel contesto del discorso che stiamo portando avanti. La curva di Koch viene definita tramite un processo iterativo, cioè si presenta la configurazione iniziale e si dichiara la legge con cui vengono formate le configurazioni successive. Consideriamo dunque un segmento S_1 e dividiamolo in 3 parti uguali; eliminiamo la parte centrale e sostituiamola con due segmenti entrambi uguali alla parte eliminata, come mostrato in figura.



La figura ottenuta, che indicheremo con S_2, è una spezzata formata da 4 segmenti ognuno dei quali è uguale ad 1/3 del segmento iniziale. Per formare ora S_3 bisogna applicare ad ogni segmento di S_2 la costruzione fatta per passare da S_1 ad S_2; in altre parole, si divide ognuno dei 4 segmenti di S_2 in 3 parti uguali, si sopprime la parte centrale e la si sostituisce con 2 segmenti uguali al segmento eliminato; si ottiene così una figura con 16 segmenti ognuno dei quali è uguale ad 1/3 di ciascuno dei segmenti di S_2 (e quindi pari ad 1/9 del segmento di partenza). Per formare S_4 bisogna iterare il procedimento descritto applicandolo ad ogni segmento di S_3; si ottiene così che S_4 è formato da 64 segmenti ognuno dei quali è uguale ad 1/3 di un (qualunque) segmento di S_3 e quindi uguale ad 1/27 del segmento iniziale S_1. Il processo così descritto può essere iterato ottenendo S_5, S_6 e, in generale, S_n per ogni numero naturale n: la curva che si ottiene come limite di tale processo iterativo è la curva di Koch (anche se il processo iterativo non si arresta ad un certo valore di n proseguendo all'infinito, ho volutamente evitato l'uso del termine "infinito" nel definire la curva di Koch).

Quali sono le particolarità di tale curva? O meglio, quali sono le particolarità che qui ci interessano? Ci prefiggiamo l'obiettivo di calcolare la lunghezza di tale curva; ovviamente, essendo definita iterativamente, bisognerà calcolare la lunghezza ad ogni passo dell'iterazione, cercando di esprimere la legge con cui tale lunghezza varia ad ogni passo; da qui sarà poi possibile determinare la lunghezza limite, cioè la lunghezza della curva (limite) di Koch. Indichiamo con L la lunghezza del segmento iniziale S_1. Per esprimere la lunghezza di S_2, basta ricordare che S_2 è formato da 4 segmenti ognuno di lunghezza pari ad 1/3 di S_1; così possiamo dire che la lunghezza di S_2 è 4/3 L. Passiamo ora ad S_3: come abbiamo già notato, S_3 è formato da 16 segmenti, ognuno dei quali pari ad 1/3 di un (qualunque) segmento di S_2, ovvero pari ad 1/9 di S_1: questo ci consente di dire che la lunghezza di S_3 è $16 \cdot 1/9 \cdot$ L, cioè 16/9 L. La legge che esprime la lunghezza ad ogni passo dovrebbe cominciare ad essere intuita, ma per amore di chiarezza facciamo un'altra iterazione, esprimendo la lunghezza di S_4. Come descritto poco fa, S_4 è formato da 64 segmenti ognuno dei quali pari ad 1/27 del segmento iniziale; da qui ne viene che la lunghezza di S_4 è 64/27 L. In generale, possiamo dire che, ad ogni passo n, il numero di segmenti di S_n quadruplica rispetto al precedente S_{n-1}, e di conseguenza tale numero è uguale a 4^n; d'altra parte la lunghezza di ciascuno dei suoi segmenti è pari ad 1/3 di un (qualunque) segmento di S_{n-1} ovvero è uguale ad $(1/3)^n$ del segmento iniziale; da ciò possiamo concludere che la lunghezza di S_n è $(4/3)^n$ L.

Da tale legge appare subito chiaro che man mano che l'iterazione avanza, la lunghezza della corrispondente spezzata S_n cresce; anzi, per il fatto che la lunghezza di S_n è 4/3 della lunghezza di S_{n-1}, possiamo aggiungere che tale lunghezza cresce superando qualunque numero che avessimo prefissato: in altre parole la lunghezza della curva di Koch è maggiore di qualunque numero o, se si preferisce, maggiore di qualunque segmento (si poteva sintetizzare il tutto dicendo che la lunghezza della curva di Koch è infinita, ma ho evitato anche stavolta l'uso del termine "infinito"). Si potrebbe anche iniziare l'iterazione partendo, anziché da un segmento, da un triangolo equilatero: la figura che così si ottiene e che prende il nome di fiocco di neve ha comunque le medesime caratteristiche discusse nel caso precedente; in figura vengono rappresentati i primi passi dell'iterazione.



Quel che abbiamo mostrato per la curva di Koch succede anche in altre situazioni la cui prima interpretazione è però più semplice. Supponiamo infatti di voler calcolare l'area di una figura piana, ad esempio di un quadrato, e per fare ciò utilizziamo il lato del quadrato stesso; anche in questo caso, come per la curva di Koch, il numero di segmenti (tutti uguali al lato) che dovrei usare per esaurire tutto il quadrato è maggiore di qualunque numero che si possa prefissare. Ma in tale caso riusciamo a spiegarci il perché ciò avviene: la risposta immediata è che non si può usare un segmento-campione per misurare un'area, le due grandezze non sono omogenee.

Ci sia consentita in proposito una piccola divagazione. Di grandezze omogenee parla già Euclide e casi particolari di tali grandezze vengono considerati anche da Archimede; Euclide, con la Definizione 4 del V libro degli *Elementi*, introduce il concetto di grandezze che oggi chiameremmo omogenee nel seguente modo: "Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente"[1].

Anche Archimede in tre delle sue opere, segnatamente *Sulla Quadratura della Parabola*, *Sulle Spirali*, *Sulla Sfera e sul Cilindro*, usa tale concetto; a titolo di esempio estrapoliamo il seguente passo tratto dall'ultima delle opere citate: "[Assumo] che inoltre per le linee disuguali, per le superficie disuguali e per i solidi disuguali, il maggiore superi il minore di una grandezza tale che addizionata a sé stessa possa superare qualunque grandezza data, tra quelle che si possono paragonare tra loro"[2]. La differenza fra le due enunciazioni non sta nell'effetto, che è quello di limitarsi a considerare quei casi in cui le grandezze considerate verificano la condizione assunta, ma piuttosto nel fatto che, mentre Euclide parla "in astratto" di grandezze che hanno rapporto, Archimede tratta casi "concreti" in cui la definizione euclidea si realizza. Oggi, quando ci

[1] A. Frajese e L. Maccioni (a cura di), *Gli Elementi di Euclide*, Torino, UTET, 1970.

[2] A. Frajese (a cura di), *Opere di Archimede*, Torino, UTET, 1974.

si riferisce a grandezze per cui non vale la precedente assunzione, si parla di grandezze non-archimedee.

Tornando nuovamente alla nostra curva di Koch, possiamo affermare che, analogamente alla situazione descritta sopra a proposito della impossibilità di misurare un'area usando segmenti-campione, quel che emerge è che la curva di Koch ed un segmento (qualunque esso sia) sono grandezze che, parlando in termini euclidei, non hanno rapporto: il secondo non può essere usato per misurare la prima, non è adeguato allo scopo.

Ma allora, se la lunghezza di tale curva non può essere misurata da segmenti-campione, potrebbe essere misurata da aree-campione? Anche in questo caso, però, la risposta è negativa; in questa sede non vedremo nel dettaglio i motivi di tale impossibilità, ma ci limiteremo ad affermare che usando un'area-campione si ha il problema opposto a quello messo in luce per il segmento-campione: mentre i segmenti-campione sono insufficienti, troppo "piccoli", per tale misurazione, le aree-campione sono sovrabbondanti, troppo "grandi". Così, mentre di segmenti-campione ne occorre un numero maggiore di qualunque numero (ho evitato anche stavolta il termine più comodo "infinito"), nel caso di aree-campione la misurazione effettuata darà come risultato zero; questo risultato è meno sorprendente del precedente se si osserva che, così come il volume di una superficie, l'area di una curva è nulla.

Volendo riassumere le osservazioni fatte finora, possiamo concludere che la curva di Koch è qualcosa in meno di una superficie, ma qualcosa in più di una linea, qualcosa che si trova a metà fra le due: è in questo senso che, come vedremo, tale curva è considerata un frattale. Per chiarire questa situazione faremo un passo cronologico in avanti fino al primo lavoro con cui Mandelbrot ha introdotto il concetto di dimensione non intera ed il cui titolo parla da sé: *How long is the coast of Britain?*[3]. In tale lavoro Mandelbrot è partito da alcune osservazioni e misurazioni geografiche riassunte da Richardson in un lavoro del 1961 in cui, come ricordato dallo stesso Mandelbrot, Richardson aveva notato e segnalato una "anomalia" nelle misurazioni della lunghezza di alcune coste, fra cui quella della Gran Bretagna. Tale anomalia era costituita dal fatto che,

[3] B. Mandelbrot, How Long is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension, Science, 156, pp. 636-638, 1967. Per ulteriori approfondimenti cfr. il classico B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, New York, W.H. Freeman, 1983.

usando unità di misura sempre più piccole, la lunghezza misurata della costa aumentava superando ogni grandezza prefissata; lo stesso Richardson, tentando di rappresentare matematicamente tale situazione, aveva proposto una legge, ovviamente empirica, che legava le grandezze che entravano in gioco in tale misurazione e che cercheremo ora di riassumere. Siano G la scala usata per misurare, ad esempio, la costa della Gran Bretagna, L(G) la lunghezza della costa corrispondente all'uso della scala G; il legame che Richardson propone fra G ed L(G) è il seguente:

$$L(G) = F \_ G^{1-D}$$

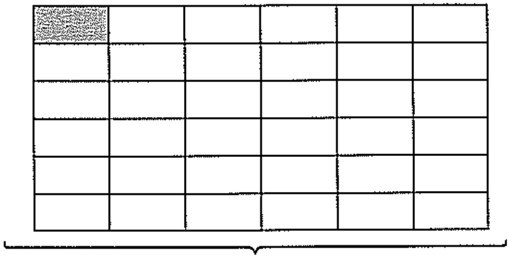
dove F e D sono due costanti, con $D = 1$.

Tale formula rappresenta abbastanza fedelmente quanto osservato da Richardson e che ribadiamo nuovamente: come prima cosa il fatto (lo abbiamo già visto per la curva di Koch) che, contrariamente a quanto ci si può aspettare, la lunghezza della costa non è un invariante, ma dipende dalla scala usata (nella precedente formula solo per $D = 1$, tale lunghezza sarebbe costante, poiché in tale caso $G^{1-D} = G^0 = 1$); come seconda cosa, meno banale della prima, la formula sopra riportata riassume in maniera abbastanza fedele l'anomalia notata da Richardson e cioè il fatto che, man mano che la scala G diminuisce, la lunghezza misurata con quella scala aumenta, anzi supera ogni grandezza prefissata (dal punto di vista strettamente matematico, essendo $D = 1$, l'esponente $1\text{-}D$ che compare nella formula è negativo o nullo; di conseguenza per valori della base G sempre più piccoli, la potenza G^{1-D} assume valori sempre più grandi, superando ogni grandezza prefissata). Il merito di Mandelbrot è stato quello di aver interpretato la costante D come una dimensione. Ma che significa ciò? Per ripercorrere l'idea di Mandelbrot, introdurremo (in maniera volutamente non formale) il concetto di autosimilarità e faremo vedere come questo sia legato alla dimensione, partendo prima da situazioni note e generalizzando a situazioni come quelle che si presentano per la curva di Koch.

Consideriamo dapprima un segmento che ha dimensione 1, come mostrato in figura; esso può essere suddiviso in N parti (nella figura N = 6) ognuna simile all'intero segmento e con un rapporto di similarità r pari ad 1/N (ciò non vuol dire altro che il segmento di partenza è N volte più grande di ciascuno degli N segmenti in cui è stato diviso).

N segmenti

Consideriamo adesso un rettangolo che ha dimensione 2, come mostrato in figura; per ogni N che sia un numero quadrato perfetto, tale rettangolo può essere suddiviso in N rettangoli (in figura N = 36) ognuno simile al rettangolo di partenza e con un rapporto di similarità r pari ad $1/\sqrt{N}$ (il rapporto di similarità riguarda i segmenti che formano il rettangolo e, nel caso rappresentato in figura, il rapporto di similarità è 1/6, essendo ogni lato del rettangolo 6 volte più grande di ciascuno dei corrispondenti lati dei rettangoli piccoli).



$\sqrt{N}$ segmenti

Consideriamo infine un parallelepipedo che ha dimensione 3; per ogni N che sia un numero cubo perfetto, tale parallelepipedo può essere suddiviso in N parallelepipedi, ognuno simile al parallelepipedo di partenza e con un rapporto di similarità r pari ad $1/\sqrt[3]{N}$. D alle situazioni presentate può essere dedotta la seguente relazione che lega il numero N di parti in cui viene divisa una figura, il rapporto di similarità r e la dimensione D:

$$N = (1/r)^D$$

In tutte le situazioni presentate la quantità D era nota e si poteva utilizzare la precedente relazione per ricavare N conoscendo r o, viceversa, ricavare r conoscendo N. Passiamo adesso ad analizzare quanto già detto a proposito della curva di Koch alla luce della precedente relazione. Infatti in questo caso possono essere calcolati sia N che r, potendo dedurre D dalla relazione precedente; infatti, dalla precedente relazione si ottiene $N = r^{-D}$, da cui $-D = \log_N r$, cioè $D = -\log_N r$, ed infine $D = -\log r/\log N$. La curva di Koch ha quella caratteristica, già messa in evidenza nei tre casi precedenti, che consente di replicare il ragionamento che ci ha portato alla precedente formula ossia è una figura autosimile, nel senso che possono essere selezionate delle parti di tale curva che risultano essere simili all'intera curva. Per meglio precisare tale fatto e per determinare di conseguenza la sua dimensione, ricordiamo che ad ogni passo dell'iterazione, ogni segmento viene sostituito con 4 segmenti, ognuno dei quali è 1/3 del segmento precedente; da ciò, usando le precedenti notazioni, possiamo affermare che $N = 4$, $r = 3$; così ricaviamo che la curva di Koch ha dimensione $d = \log 4/\log 3$, cioè una dimensione non solo non intera, ma addirittura irrazionale.

Ma quale considerazione possiamo trarre da questa strana dimensione e, in particolare, che cosa ha a che fare tale numero con il problema di misurazione con cui abbiamo iniziato? Per misurare lunghezze bisogna usare segmenti-campione, poiché tali entità, avendo dimensione 1, sono adatte a misurare entità unidimensionali; analogamente per misurare aree bisogna usare superfici-campione, poiché esse, essendo bidimensionali, sono adatte per tale misurazione. Quando abbiamo dovuto determinare la *lunghezza* della curva di Koch il risultato è stato un numero non costante, non intrinseco alla curva medesima, ma dipendente dall'unità di misura scelta, con l'ulteriore complicazione di una crescita senza limitazioni; abbiamo anche accennato al fatto che, d'altra parte, l'*area* di tale curva è nulla, concludendone che le due non erano adatte a fornirne una corretta misurazione. Ora riusciamo a darcene una ragione: la dimensione dei segmenti usati per valutarne la lunghezza è 1, inferiore alla dimensione della curva di Koch, mentre nel tentativo di valutarne l'area si usano superfici-campione di dimensione 2, superiore alla dimensione della curva di Koch. Se voglio misurare un oggetto di dimensione 1 userò segmenti-campione, anch'essi di dimensione 1; se voglio misurare un oggetto di dimensione 2, userò superfici-campione, anch'esse di dimensione 2; per misurare la curva di Koch bisogna usare delle curve di Koch-campione e questo dipende, come già accennato, dal fatto che essa è una curva autosimile.

Prima di passare ad alcune riflessioni conclusive è il caso di sottolineare due altri aspetti. Il primo è che l'autosimilarità, che per la curva di Koch è "totale", in situazioni non ideali, quale la misurazione della costa della Gran Bretagna, può essere considerata soltanto come autosimilarità statistica: è questo il senso del sottotitolo del già citato lavoro di Mandelbrot che recita appunto "*fractional dimension and statistical self-similarity*". In figura viene riportata l'ormai celebre rappresentazione dell'insieme di Mandelbrot con alcuni "dettagli" che sono "simili" all'intero insieme.

Il secondo è che il problema della dimensione era stato affrontato già nel primi del Novecento dalla scuola russa di topologia e, in particolare, da Hausdorff che l'aveva generalizzata dal caso algebrico al caso topologico; nel primo caso la definizione era quella classica dipendente cioè dal numero di parametri liberi e pertanto portava a dimensioni che, seppur maggiori di 3, erano in ogni caso intere; la generalizzazione di Hausdorff consentiva dimensioni anche non intere, ma tale generalizzazione era rimasta al livello di semplice curiosità matematica, non degna di attenzione, fin quando essa ha trovato nei frattali il luogo in cui potersi realizzare, il suo ambiente naturale in cui poter portare i frutti già in qualche modo insiti negli studi di Hausdorff.

Osservazioni conclusive

Come abbiamo cercato di mettere in luce, gli ingredienti che hanno portato Mandelbrot ai frattali erano tutti pronti: dalla dimensione non intera di Hausdorff-Besicovitch, agli esempi di curve non rettificabili, fino alle osservazioni empiriche di Richardson. Questo ci porta a fare due osservazioni conclusive. La prima è quella di mettere in luce il merito di Mandelbrot, che è stato quello di aver trasportato il concetto di dimensione non intera dall'empireo delle definizioni astratte al mondo della concretezza applicativa, riuscendo così a fornire una spiegazione coerente di fenomeni la cui natura spazia ormai dall'economia, alla fisica, dalla meteorologia, alla medicina, alla stessa matematica che si è ritrovata arricchita di un nuovo "oggetto" da studiare. La seconda vuole essere provocatoria e riguarda il lavoro oscuro del matematico, ma che potrebbe benissimo essere estesa ad altri campi di ricerca. Chi avrebbe giudicato serie le ricerche di Hausdorff sulla generalizzazione del concetto di dimensione? Chi avrebbe considerato meritoria di incoraggiamento una ricerca sulle curve non rettificabili? Ovviamente le domande andrebbero contestualizzate al momento storico in cui tali ricerche sono state attive e sarebbe meglio riformularle così: chi oggi finanzierebbe a scatola chiusa una ricerca "fine a se stessa" come doveva apparire ai contemporanei di Hausdorff la ricerca sulla dimensione? E che dire delle ricerche "fini a se stesse" (qui taciute per motivi di spazio) di Julia e Fatou che avevano già dimostrato parecchie proprietà di quelle curve strane, come la curva che oggi si chiama "insieme di Fatou", senza poterle visualizzare per la mancanza del calcolatore che si rivelerà dopo alcuni decenni lo strumento essenziale per una loro rappresentazione visiva? E che dire ancora, per cambiare settore, delle ricerche "fini a se stesse" sui numeri naturali da cui oggi è scaturita la moderna crittografia sulla quale poggia la sicurezza dei sistemi finanziari e militari mondiali? Chi avrebbe mai finanziato una tale ricerca? Si potrebbero portare un numero infinito (stavolta ho ceduto all'uso del termine, ma il senso qui è letterario e non matematico!) di esempi di ricerche apparentemente "fini a se stesse" e su cui non si punterebbe una sola moneta, ma non bisogna dimenticare che di "ricerca" si tratta e quando si fa ricerca non si sa esattamente cosa si troverà e quali scenari si potranno aprire: in caso contrario sarebbe meglio riservarle un altro nome, magari … magari lasciando al lettore che fin qui ci ha cortesemente seguito di provare a sostituire i puntini con il termine che più gli aggrada.